Divisibilité

Division euclidienne

Remarques

a et b deux entiers et $a \neq 0$ on appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante :

- q est le plus grand entier $\leq \frac{a}{b}$ si $b > 0$.
- q est le plus petit entier $\geq \frac{a}{b}$ si $b < 0$.

Exemple :

$\frac{-48}{9} = -5, \ldots\ldots -6 \leq \frac{-48}{9} \leq -5$

$\Rightarrow$ q= -6 $\Rightarrow$ -48 = 9(-6) + 6 et donc r = 6.

$\frac{-48}{9} = -5, \ldots\ldots -6 \leq \frac{-48}{9} \leq -5$

$\Rightarrow$ q=-5 $\Rightarrow$ 48 = -9 (-5) + 3 et donc r = 3

Rq : Si a = bq + r on a :

$0 \leq r < |b|$

Congruence modulo n :

$a \equiv b\ (mod\ n)$ ssi a- b est multiple de n.

a = bq+r $\Rightarrow$ a $\equiv$ r(mod b)

$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow$ a et b ont le même reste modulo n.

Propriétés

$a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{N}^*$

- $a \equiv b\ (mod\ n) \Leftrightarrow$ b $\equiv$ a (mode n)

Si $\begin{matrix} a \equiv b\ (mod\ n) \\ b \equiv c\ (mod\ n) \end{matrix}$ $\{alors\ a \equiv c\ (mod\ n)$

On a aussi : Si $a \equiv c$ (mod n) et $b \equiv d$ (mod n)

$$\begin{cases} a+b \equiv c+d\ (mod\ n) \\ ab \equiv cd\ (mod\ n) \end{cases}$$

- Si $a \equiv b\ (mod\ n)$ alors

$$\begin{cases} ka \equiv kb\ (mod\ n); k \in \mathbb{Z} \\ a^m \equiv b^m\ (mod\ n); m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Applications :

1) Calculer le quotient de a par b si :

a) a = 16480 , b = -160

b) a= -16480 , b = 160

c) a= -16480 , b = -160

d) a= 16480 , b = 160

2) vérifier que $566 \equiv 6\ (mod\ 7)$. En déduire que $566^{2n} \equiv 1\ (mod\ 7)$.

3) 1) Discuter suivant les valeurs de k, le reste modulo 7 de 2^k.

2) En déduire le reste de 247^{349} modulo 7.

3) Calculer le reste de 298^{349} modulo 13.

4) Déterminer tous les entiers a et b tel que $ab \equiv 1\ (mod\ 6)$

5) Déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^9 - a$.

Rappelons enfin **le théorème de Fermat** :

Pour tout entier naturel a et tout entier premier p ne divisant pas a on a :

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Application :

1) Montrer que 13 divise $51^{12}-1$
2) Montrer que 50 divise $51^{12}-1$
3) En déduire que 650 divise $51^{12}-1$

Définition-Rappel	Description		