4ème Info	Série / Fonctions Exponentielle	Proposer par/ Mantadher Ben Marzouk

Cours

Propriétés

- $e^{a+b} = e^a . e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e = 2.7$

Limites

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

Dériver

- $(e^u)' = u'\ e^u$

Remarques

$e^{\ln x} = x$ $e^a = e^b$ alors $a=b$; $x < e^x$; $e^x = a$ alors $x = \ln a$

Exercice N°1

Une seule des réponses est exacte.

1. Le nombre réel $\frac{\ln e}{\ln(e^2)}$ est égal à :

a) $\ln(\frac{1}{e})$	b) $\frac{1}{e}$	c) $\frac{1}{2}$

3. Le nombre réel $e^{-2\ln 3}$ est égal à

a) $\frac{1}{9}$	b) $\frac{1}{8}$	c) - 9

4. Une primitive F de la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^{-2x}$ est définie par :

a) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$	b) $F(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$	c) $F(x) = -2\,e^{-2x}$

5. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a) y=x+1	b) y=ex	c) $y=e^x$

6. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{e^x-1}$. La fonction f est définie sur :

a) IR	b) IR / {0}	c) $[0, +\infty[$

7. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x-1+\frac{1}{e^x-1}$

La courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$:

a) L'axe des abscisses comme asymptote horizontale

b) La droite d'équation y=2x+1 comme asymptote oblique

c) La droite d'équation y=2x-1 comme asymptote oblique

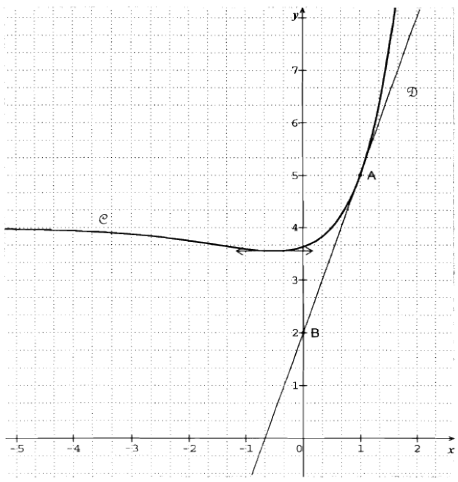
Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur IR par

$f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c$

où *a*, *b* et *c* sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.

La courbe C représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé est représentée ci-dessous.



- La courbe C passe par le point A(1 ; 5), elle admet la droite D comme tangente en ce point.
- Le point B(0 ; 2) appartient à la droite D.
- La courbe C admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{-1}{2}$.

Partie A

1) a) Préciser les valeurs de f(1) et $f'(\frac{-1}{2})$.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite D . En déduire $f'(1)$.

2) Montrer que, pour tout x de IR $f'(x) = (ax+b+a)e^{x-1}$.

3) Montrer que *a*, *b* et *c* vérifient le système $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a, b et c.

Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel $f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4$.

1) a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Vérifier que, pour tout réel

$f(x) = \frac{2}{e} xe^{x} - \frac{1}{e} e^{x} + 4$.

En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2) a) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

b) Etablir le tableau de variations de f. et déterminer le signe de f(x)

c) Montrer que l'équation f(x)=6 admet une unique solution réelle a sur [1 ; 2]. On donnera un encadrement de a d'amplitude 0,1.

Partie C

On considère la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (2x-3)e^{x-1} + 4x$ . .

Montrer que F est une primitive de f sur IR.

2) Soit $\mathcal{A}$ la partie du plan située entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1 .

Calculer l'aire de la partie $\mathcal{A}$ exprimée en unités d'aire ; on donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au dixième.

Exercice 3

Soit la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3+x^2+x-1$.

Établir que l'équation g(x) =0 admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$ $f'(x)$ et g(x) sont de signes contraires.

b) En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.

4) On considère la suite (Un) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \int_n^{2n} f(x)dx$

a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $0 \le \frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \le U_n \le \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$ . .

c) En déduire la limite de Un qd n tend vers $+\infty$

Exercice N°4

Partie A

On note f la fonction définie sur I= $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i} ; \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C_f ?

2) a) Démontrer que $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$ puis dresser le tableau de variation .

b) Démontrer que l'équation f(x) =2 à une unique solution notée α appartenant à I et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3) Tracer la courbe C_f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie B - Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \, dx$.

1) Calculer I_2.

2) **Une relation de récurrence**

a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, pour $n \geq 2$: $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n$.

b) Calculer I_3.

3) **Étude de la limite de la suite de terme I_n**

a) Établir que pour tout nombre réel $x \in [1;2]$, on $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite I_n

Exercice N°5

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^x - x$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) En déduire que g(x) est strictement positif pour tout réels x.

2)Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 + x)(1 + e^{-x})$

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que la droite Δ : y = x + 1 est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

d) Construire (C_f) et Δ

3) Par une intégration par partie, montrer que : $\int_{-1}^{0} (1 + x) e^{-x} \, dx = e - 2$

4) En déduire l'aire A de la partie limitée par la courbe (Cf), les droites $x = -1$ et x = 0 et Δ.

Exercice N°6

On désigne par f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x-5}{e^x}$

On nomme C sa représentation graphique dans le plan (P) muni d'un repère Orthonormé

1)Calculer f(0)

2) a) Vérifier que, pour tout x >0 ; $f(x) = \frac{5 - \frac{5}{x}}{\frac{e^x}{x}}$.

b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Démontrer que pour tout nombre réel x positif : $f'(x) = \frac{-5x+10}{e^x}$.

b) Étudier le signe de la fonction f' .

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Représenter graphiquement la courbe C dans le plan (P) d'unité graphique 2 cm.

5) On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = -5xe^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) On considère l'aire A , exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=4 .

Hachurer ce domaine sur le graphique précédent.

Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut

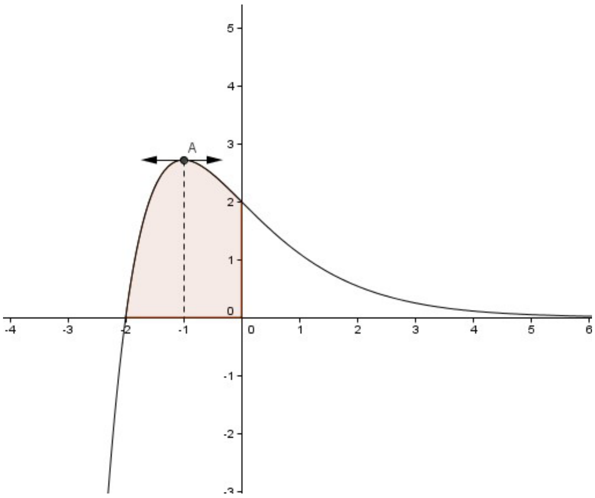
Exercice N°7

Soient a et b deux réels et la fonction f dérivable sur IR par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$.

Dans le graphique ci-dessous (C) est la courbe représentative de f,

dans un repère orthonormé.

- (C) admet au point d'abscisse (-1) une tangente horizontale.
- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
- (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



1) Par une lecture graphique déterminer : f(0) , f(-2) et f'(-1).

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Montrer que : $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$;

3) Calculer l'aire du domaine limité par les droites D : x=-2, D' : x=0, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

Exercice N°8

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de $[0,+\infty[$ par g(x) = x-xlnx

1) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g'(x) = - lnx.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (U_n) la suite définie pour tout n∈ IN* par $U_n = \frac{e^n}{n^n}$.

1) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
   a) le sens de variation de la suite (U_n) ;
   b) la limite éventuelle de la suite (U_n) .
2) Soit (V_n) la suite définie pour tout n∈ IN* par $V_n = \ln(U_n)$.
   a) Montrer que $V_n = n - n\ln n$.
   b) En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (V_n) .
   c) En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .
3) Montrer que la suite (U_n) est bornée.
4) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°9

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2cm)

1) a) Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$
   b) Calculer $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{-\infty} f(x)$; interpréter les résultats obtenus.
2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0
1) Tracer (T) et (C_f)
2) a) Montrer que : $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(\frac{1+e}{2})$
   b) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine limité par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives : y= − 1 ; x =0 et x = 1