Cours

Propriétés

- ln(a.b) = lna+lnb
- $\ln a^n$ = nlna
- ln($\frac{a}{b}$)= lna-lnb
- ln1=0 ; ln e= 1

limites :

$\lim_{x\to+\infty} lnx=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}=0$

$\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty$; $\lim_{x\to0^+} x\, lnx= 0$

$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}=1$

Dériver

ln(u)' = $\frac{u'}{u}$

Remarques

ln(a)=ln(b) alors a=b; lnx < x ; lnx =a alors x =e^a

Exercice N°1

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

1) Le nombre réel $\frac{\ln e+ln\sqrt{e}}{ln\,e^2}$ est égal à : a) $\frac{3}{4}$ b) 3 c) $\frac{3}{2}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{x}\right)$est : a)$-\infty$ b) 0 c)1

3) L'ensemble des définitions de ln(3-x) est : a)]3 ; +∞[b) $]-3\,;\,+\infty[$ c)] -∞;3 [

4) Le nombre réel$\frac{\ln e}{ln\,e^2}$ est égal à : a) $\frac{1}{4e}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$

5) soit a ∈]0 ; +∞[;la matrice A $\begin{pmatrix} \ln a & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ssi a) a≠ln2 b) a ≠ e c) a≠1.

6) l'équation : - $(\ln x)^2$-2lnx+3=0 a pour solutions dans]0 ;+∞ [.

a) S_{IR} ={$\frac{1}{e}$; 1} b) S_{IR} ={e ; 1} c) S_{IR} ={e}

Exercice N°2

A-1) Démontrer que pour tout x∈]$-\frac{1}{2}$; +∞[: $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$

2) En déduire $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

B- Soit la fonction f définie sur$[-1;+\infty[$ par :$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}\ ;\ x\in]-1\,;\,+\infty[/\{0\}. \\ f(0)=1\,;\,f(-1)=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[1;+\infty[$

2) Etudier la dérivabilité de f.

3)a) Etudier le signe de u(x)= ln (1+x)- $\frac{x}{1+x}$; pour x∈ $]-1;+\infty[$

b) Etudier les variations de f

4)a) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0 . Etudier la position de (C) et T.

b) Tracer (C) .

Exercice N°3

On considère la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par f(x) =-3x+4+8ln(x+1) .

1) a) Calculer $\lim_{x\to-1^+} f(x)$.. Donner l'interprétation graphique du résultat obtenu.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra utiliser $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+1)}{x}$ =0).

2) a) Démontrer que f '(x) = $\frac{5-3x}{x+1}$; Pour x ∈]-1 ; +∞[

b) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f sur]-1 ; +∞[.

3) Démontrer que dans]$\frac{5}{3}$; +∞[, l'équation f(x) =0 admet une solution unique notée a.

4) a) Vérifier que la fonction *F* définie par F(x) =$\frac{-3}{2}x^2$-4x+8 ln(x+1) ln(x+1) est une primitive de f sur]-1 ; +∞[.

b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=5.

Exercice N°4

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1. On considère la fonction *g* définie sur]0 ; +∞[par : g(x) = lnx+2x^2-3 .

Le tableau de variation de la fonction *g* est donné ci-dessous :

x	0		α		+∞
g	‖ −∞	↗	0	↗	+∞

En utilisant une calculatrice, on a obtenu a=1,19. Dresser le tableau donnant le signe de la fonction *g* sur]0 ; +∞ [.

2. On considère la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par : f(x) = $\frac{2}{x}$ - $\frac{lnx}{x}$ +2x-5.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

a) Déterminer$\lim_{x\to 0^+} f(x)$et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

3) a) Calculer f'(x) et montrer que pour tout réel x ∈]0 ; +∞ [. on a :f'(x) $= \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f sur]0 ; +∞ [et dresser le tableau de variations.

c) Déterminer le signe de f pour tout x ≥ e.

4) Soit *h* la fonction définie sur]0 ; +∞ [par :h(x) = (lnx)^2 .

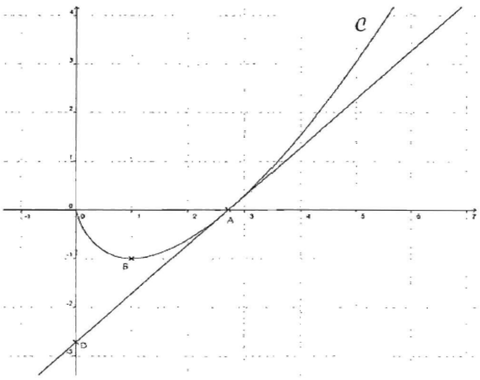
a) Calculer *h'*.

b) En remarquant que pour tout x de]0 ; +∞ [, on a : f(x) = $\frac{2}{x} - \frac{1}{2}$ h'(x) +2x-5 , Trouver une primitive F de la fonction f sur]0 ; +∞ [.

c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=e et x=e^2 .

Exercice N°5

Partie A



La courbe C_f ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur]0 ;+∞ [.

- C_f passe par les points: A(e; 0) et B(1; -1).
- C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; -e).

1) Déterminer une équation de la droite (AD).

2) Par lectures graphiques:

a) Déterminer f(1)et f'(1).

b) Dresser le tableau de signes de f sur]0 ; 5].

c) Dresser le tableau de signes de f' sur]0 ; 5].

Partie B. Étude de la fonction

La courbe C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur]0 ;+∞ [par

f(x) = x(ln x -1) .

1) a) Déterminer la limite de f en +∞ .

b) Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞ [par h(x) = xln x . Déterminer la limite de f en 0.

2) a) Montrer que, pour tout x ∈]0 ; +∞ [, on a : f'(x)= lnx .

b) Déduire le tableau de variation de f sur]0 ; +∞ [.

3) a) Démontrer que la fonction H définie sur]0 ; +∞ [par H(x)= $\frac{1}{2}$ x^{2}ln x - $\frac{1}{4}$ x^2 est une primitive sur]0 ; +∞ [de la fonction h définie à la question 1.b).

b) En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^e f(x)dx$.

c) En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=1 et x=e.

Exercice N°6

Partie A

Soit g la fonction définie sur.]0 ;+∞ [.par $g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3$

1) Calculer g'(x).
2) déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle]0 ;+∞ [.
3) En déduire que g(x) > 0 pour tout.]0 ;+∞ [.

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0;+∞ [. par $f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$

1) Déterminer les limites de f en +∞ et en 0.
2) a) Montrer que, pour tout x de]0 ;+∞ [$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^3}$

b) En déduire le tableau de variations de f sur]0 ;+∞ [.

Partie C

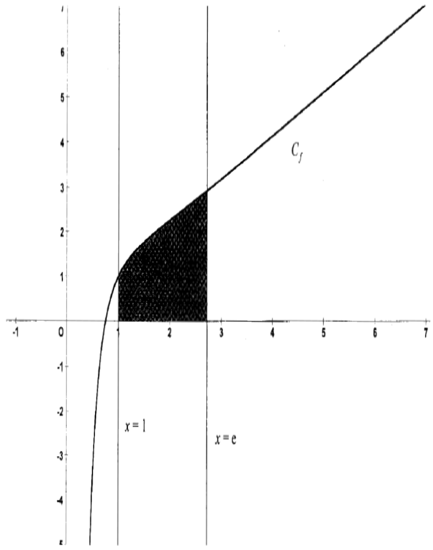
1) On définit la fonction F sur]0 ;+∞ [par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\frac{1+\ln x}{x}$

Montrer que la fonction F est une primitive de f sur]0 ;+∞ [.

2) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée C_f.

On a colorié le domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=e .

Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.



Exercice N°7

On considère la fonction f définie sur]0;+∞ [par $f(x) = 3 + 5\frac{\ln x}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1) a) Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique.

b) Déterminer la limite de f en +∞ ; en donner une interprétation graphique.

2) a) Calculer f'(x), puis étudier son signe.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de f(e).

3) a) Déterminer une primitive de f sur]0;+∞ [.

On pourra remarquer que f(x) =5u'(x) . u(x) +3 avec u(x) à préciser.

b) En déduire la valeur exacte de $I = \int_2^4 f(t)dt$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.

4) a) Préciser le signe de f sur l'intervalle [2 ; 4].

b) Donner une interprétation graphique de I.

Exercice N°8

Partie A :

On considère la fonction g définie sur]0;+∞[par g(x) = −2ln(x) − ex +1.

1) Déterminer les limites de g à droite de 0 et en +∞.
2) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur]0;+∞[.
3)a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α > 0 .

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4) Déterminer le signe de g(x) sur]0;+∞[.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par f(x) = $\frac{ex+lnx}{x^2}$

1) Déterminer les limites de f à droite de 0 et en +∞.

2) Montrer que : f (α)= $\frac{e\alpha+1}{2\alpha^2}$ étant le réel défini dans la partie A 3°).

3) a) Démontrer que, pour tout réel x de]0;+∞[, on a : f' (x)= $\frac{g(x)}{x^3}$

b) En déduire le tableau des variations de f sur]0;+∞[.

Exercice N°9

Soi t f la fonction définie sur I= $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, par : f (x) =$x^2$(2lnx-3) et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ,$\vec{i}$,$\vec{j}$)d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. Montrer que, pour tout nombre réel de $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, f'(x) =4x(lnx-1) .
3. Résoudre dans $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, l'inéquation ln x-1>0. En déduire le signe de f'(x) sur I.
4. Déterminer les valeurs exactes de f($\frac{1}{e}$),$f(1)$, $f(\sqrt{e})$et $f(e)$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.
6. On nomme A le point d'intersection de la courbe Cet de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
7. Tracer la courbe C dans le repère (O ,$\vec{i}$,$\vec{j}$) .
On fera apparaître le point A et la tangente au point d'abscisse e à la courbe C .
8. Soit m un nombre réel. Déterminer graphiquement selon la valeur de m , le nombre de solutions de l'équation f(x) =m .

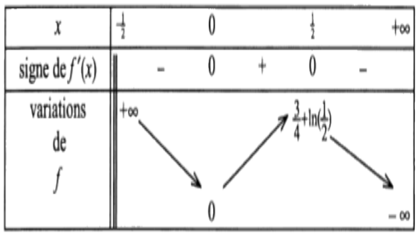
Partie B

1. Soit F la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, par F(x) = $\frac{2}{3}$ x^3lnx- $\frac{11}{9}$$x^3$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.
2. Calculer l'intégrale I= $\int_1^e f(x)dx$. En donner la valeur exacte arrondie à 10^{-2}.

Exercice N°10

A- On considère une fonction g définie sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$par :g(x) =-$x^2$+ax-ln(2x+b) ,où a et b sont des réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

B - Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :
f(x) =-x^2+2x-ln(2x+1) On admet que f est dérivable
Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :



1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. a) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une unique solution a dans $\left[\frac{1}{2},1\right[$.
b) Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de f(x) sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.